Soluciones a los ejercicios propuestos del Tema 3

3.1. Suponiendo que $\mu = 200$ y $\sigma = 40$, vamos a imponer que la probabilidad de que decida dejar de comprar al laboratorio sea menor o igual que 0.05: $P(\bar{X} < 1180) = P(Z < \frac{1180-1200}{40/\sqrt{n}}) \leq 0.05$, usando que $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Entonces, $\frac{1180-1200}{40/\sqrt{n}} \leq -1.645$, luego despejando, $n \geq 10.8241$, esto es, $n \geq 11$.
3.2.(a) Hemos de calcular $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.1) = P(|Z| \leq \frac{0.1}{0.75/\sqrt{40}}) \cong P(|Z| \leq 0.84) = 0.79954 - (1 - 0.79954) = 0.599$.
3.2.(b) Buscamos n tal que $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.1) \geq 0.9$. Como $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.1) = P(|Z| \leq \sqrt{n} \times 0.1/0.75)$, tenemos que $\sqrt{n} \times \frac{0.1}{0.75} \geq 1.645$, de donde despejando n tenemos que $n \geq 152.2139$, luego $n \geq 153$.
3.3. Hemos de calcular $P(|\bar{X} - \mu| < 1.6) = P(|Z| < \frac{1.6}{5/\sqrt{100}}) = P(|Z| < 3.2) = 0.99931 - (1 - 0.99931) = 0.99862$.
3.4. A partir de los datos calculamos la media y la desviación muestrales: $\bar{x} = 895.8$, $s = 3.881580434$. Intervalo de confianza para μ con $\sigma = 4$, con $\gamma = 0.99$ como nivel de confianza (usamos que $Z_{0.995} = 2.576$, mirando en la tabla de la t de Student con ∞ grados de libertad):

$\bar{x} \pm 2.576 \frac{4}{\sqrt{10}} = 895.8 \pm 3.25841 = (892.54159, 899.05841)$. No es consistente con la información de los paquetes pues $100 \notin$ intervalo. Intervalo de confianza para μ con σ desconocida y la misma γ (usamos que $t^9_{0.995} = 3.250$, mirando en la tabla de la t de Student, con $n - 1 = 9$ grados de libertad):

$\bar{x} \pm 3.250 \frac{s}{\sqrt{10}} = 895.8 \pm 3.98926 = (891.81074, 899.78926)$. Tampoco es consistente.
3.5. La media y desviación muestrales son: $\bar{x} = 3840.\overset{\frown}{2}$, $s = 35.52033924$. Intervalo de confianza para μ con $\sigma = 35$, con $\gamma = 0.90$ como nivel de confianza (usamos que $Z_{0.95} = 1.645$, mirando en la tabla de la t de Student con ∞ grados de libertad):

$\bar{x} \pm 1.645 \frac{35}{\sqrt{9}} = 3840.\overset{\frown}{2} \pm 19.191\overset{\frown}{6} = (3821.030555, 3859.413889)$. Intervalo de confianza para μ con σ desconocida y la misma γ (usamos que $t^8_{0.95} = 1.860$, mirando en la tabla de la t de Student, con $n-1 = 8$ grados de libertad):

$$\bar{x} \pm 1.860\,\frac{s}{\sqrt{9}} = 3840.\widehat{2} \pm 22.02261033 = (3818.199611,\ 3862.244833)\,.$$

3.6. La estimación para p, la proporción, es $\hat{\hat{p}} = \frac{49}{140} = 0.35$. La condición para poder calcular el intervalo asintótico: $140 \times 0.35 \times 0.65 = 31.85 \geq 18$ se cumple. El intervalo con nivel de confianza (aproximado) $\gamma = 0.95$ es (usando $Z_{0.975} = 1.96$): $0.35 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.35\times 0.65}{140}} = 0.35 \pm 0.07901012593 = (0.2709899,\ 0.4290101)\,.$

3.7. Buscamos n tal que $2\,Z_{0.975}\sqrt{\frac{\hat{\hat{p}}\,(1-\hat{\hat{p}})}{n}} \leq 0.04$. Acotando superiormente $\hat{\hat{p}}\,(1-\hat{\hat{p}})$ por $1/4$, es suficiente con encontrar n tal que $\frac{Z_{0.975}}{\sqrt{n}} \leq 0.04$, y despejando n, $n \geq (\frac{1.960}{0.04})^2 = 2401\,.$

3.8. Estimación puntual de la cantidad media de plata: $\hat{\mu} = \bar{x} = 5.2$ mg. I.C. para μ, con $\gamma = 0.95$ (σ desconocida, usamos que $t^4_{0.975} = 2.776$): $\bar{x} \pm 2.776\,\frac{s}{\sqrt{5}} = 5.2 \pm 0.4210012447 = (4.778998755,\ 5.621001245)\,.$ I.C. para σ^2 con la misma confianza (usamos que $\chi^{2,4}_{0.975} = 11.14$ y $\chi^{2,4}_{0.025} = 0.48$, y que $(n-1)\,s^2 = 4 \times 0.115 = 0.46$): $(\frac{0.46}{11.14}, \frac{0.46}{0.48}) = (0.04129264,\ 0.958\widehat{3})\,.$

3.9. Tenemos $n = 4 \times 20 = 80$ observaciones para cada máquina. Intervalos de confianza para σ, con $\gamma = 0.90$ (usamos que $\chi^{2,79}_{0.95} \cong 101.88$ y $\chi^{2,79}_{0.05} \cong 60.39$, aproximando por la χ^2_{80}, que es el valor más próximo en la tabla): para la máquina 1 es $\left(\sqrt{\frac{(80-1)\,(4.632)^2}{101.88}}, \sqrt{\frac{(80-1)\,(4.632)^2}{60.39}}\right) = (4.07885,\ 5.29785)$, y para la máquina 2, $\left(\sqrt{\frac{(80-1)\,(3.495)^2}{101.88}}, \sqrt{\frac{(80-1)\,(3.495)^2}{60.39}}\right) = (3.07763,\ 3.99741)$. La máquina 2 está en regla pues con una confianza (aproximada) del 90 %, su desviación está en el intervalo (lo que implica que es menor que 4), y la 1 no.

3.10. Buscamos n tal que la longitud del intervalo, que es $2 \times Z_{0.995} \times \frac{70}{\sqrt{n}}$, sea menor o igual que 50, de donde aislando obtenemos que $\sqrt{n} \geq \frac{2\times 2.576\times 70}{50} = 7.2128$, luego $n \geq (7.2128)^2 = 52.02448384$, esto es, $n \geq 53\,.$

3.11. Buscamos el I. C. asintótico para p, la proporción de días sin precipitaciones, con $\gamma = 0.95$ (se usa $Z_{0.975} = 1.960$), y estimación de p, $\hat{\hat{p}} = \frac{168}{200} = 0.84$. Se puede hacer porque $n\,\hat{\hat{p}}\,(1-\hat{\hat{p}}) = 26.88 \geq 18$, y es: $\hat{\hat{p}} \pm Z_{0.975}\sqrt{\frac{\hat{\hat{p}}\,(1-\hat{\hat{p}})}{n}} = 0.84 \pm 0.05080900707 = (0.7891909929,\ 0.8908090071)\,.$

3.12. Estimación de σ^2: la variancia muestral $s^2 = 122.11579\,.$ I. C. para σ^2 (usa que $\chi^{2,19}_{0.975} = 32.85$, que $\chi^{2,19}_{0.025} = 8.91$, y que $(n-1)\,s^2 = 2320.200001$):

$(\frac{(n-1)\,s^2}{32.85},\ \frac{(n-1)\,s^2}{8.91}) = (70.63013702,\ 260.4040405)$. I. C. para σ (se obtiene haciendo raíces cuadradas): $(8.404173786,\ 16.1370394)$.

3.13. Con media $\bar{x} = 12.54$ y desviación $s = 0.4037325848$, el I.C. para μ, con σ desconocida y $\gamma = 0.90$ es (usamos $t^4_{0.95} = 2.132$): $\bar{x} \pm 2.132\,\frac{s}{\sqrt{5}} = 12.54 \pm 0.3849426223 = (12.15505738,\ 12.92494262)$.

3.14. I.C. para μ, $\sigma = 0.10$ conocida, con $\gamma = 0.95$ (se usa $Z_{0.975} = 1.960$): $\bar{x} \pm 1.96\,\frac{0.1}{\sqrt{6}} = 10.45 \pm 0.08001666493 = (10.36998334,\ 10.53001666)$. Sí, hay evidencias de error sistemático ya que $10.2 \notin$ intervalo. Para buscar n de manera que la longitud del intervalo sea menor o igual que 0.10 se impone que $2 \times 1.96 \times \frac{0.1}{\sqrt{n}} \leq 0.1$, y despejando n se obtiene $n \geq (2 \times 1.96)^2 = 15.3664$, esto es, $n \geq 16$.

3.15. I.C. para μ, σ desconocida, con $\gamma = 0.95$ (se usa $t^{59}_{0.975} \cong 2.000$): $\bar{x} \pm 2 \times \frac{0.64}{\sqrt{60}} = 10.12 \pm 0.1652472894 = (9.95475271,\ 10.28524729)$. I.C. para σ (con $\chi^{2,59}_{0.975} \cong 83.30$ y $\chi^{2,59}_{0.025} \cong 40.48$):

$$(\sqrt{\frac{59 \times (0.64)^2}{83.30}},\ \sqrt{\frac{59 \times (0.64)^2}{40.48}}) = (0.5386212446,\ 0.7726551931)\,.$$

3.16. I.C. para μ, con $\gamma = 0.95$, y σ desconocida (en todos los casos, se usa que $t^4_{0.975} = 2.776$): $\bar{x} \pm 2.776 \times \frac{s}{\sqrt{5}}$.

Muestra 1: $(0.34504,\ 0.39296)$, $0.378 \in$ intervalo, luego no difiere significativamente.

Muestra 2: $(0.55995,\ 0.61805)$, $0.565 \in$ intervalo, luego no difiere significativamente.

Muestra 3: $(0.70873,\ 0.73927)$, $0.750 \notin$ intervalo, luego **sí** difiere significativamente.

3.17. I.C. para $\mu_1 - \mu_2$ con σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas. Tenemos que $\bar{x}_1 = 0.561\overset{\frown}{6}$ y $\bar{x}_2 = 2.688$ son las medias muestrales, y $s_1^2 = 0.07941\overset{\frown}{6}$ y $s_2^2 = 0.19987$ las variancias muestrales, de las muestras de tamaños respectivos $n_1 = 6$ y $n_2 = 5$. Necesitamos calcular aproximadamente el número de grados de libertad, que es ν. Usando la fórmula obtenemos $\frac{1}{\nu} = 0.1534689551$, luego $\nu = 6.515975816$, así que tomamos $\nu = 6$ (pues ν está entre 6 y 7 y el intervalo con 7 tiene una longitud inferior, con lo que no aseguramos tan bien la confianza que deseamos). El intervalo es aprox. $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t^6_{0.975}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = -2.126\overset{\frown}{3} \pm 2.447\sqrt{\frac{0.07941\overset{\frown}{6}}{6} + \frac{0.19987}{5}} = -2.126\overset{\frown}{3} \pm 0.5644572458 = (-2.69079,\ -1.561876)$.

Sí que podemos decirlo, porque $0 \notin$ intervalo (de hecho, podemos decir que $\mu_1 < \mu_2$).
3.18. Buscamos un I.C. para $\mu_1 - \mu_2$, con $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (aunque su valor es desconocido) y muestras independientes. Tenemos que para las dos muestras los tamaños muestrales, las medias y las variancias son $n_1 = 8$, $\bar{x}_1 = 3.1125$, $s_1^2 = 0.04982142855$ y $n_2 = 10$, $\bar{x}_2 = 2.96$, $s_2^2 = 0.033\overset{\frown}{7}$, respectivamente. Hemos de calcular la variancia ponderada $s_p^2 = \frac{(n_1-1)\,s_1^2+(n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{0.65275}{16} = 0.040796875$, y buscando en la tabla de la t de Student obtenemos $t_{0.975}^{16} = 2.120$. Por tanto, el intervalo es, teniendo en cuenta que $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.1525$: $0.1525 \pm 2.120 \times s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 0.1525 \pm 0.203114332 = (-0.050614332, 0.355614332)$. Como $0 \in$ intervalo, no podemos decir que haya diferencias significativas.
3.19. Buscamos un I.C. para $\mu = \mu_1 - \mu_2$ (datos emparejados): en primer lugar restamos (método 1− método 2) para tener la muestra de tamaño $n = 10$ de la diferencia, que es:

$$-0.47,\ -0.41,\ 0.12,\ 0.09,\ 0.45,\ 0.19,\ -0.24,\ 0.07,\ -0.07,\ -0.1$$

y ahora buscamos el I.C. de nivel $\gamma = 0.99$ para μ, con σ desconocida, a partir de esta muestra. Teniendo en cuenta que para esta muestra la media es $\bar{d} = -0.037$ y la desviación $s_d = 0.2816242572$, y también que $t_{0.995}^{9} = 3.250$, el intervalo queda: $-0.037 \pm 3.250\,\frac{0.2816242572}{\sqrt{10}} = -0.037 \pm 0.2894365815 = (-0.3264365015, 0.2524365815)$. Como $0 \in$ intervalo, no podemos decir que haya diferencia significativa entre las concentraciones medias del principio activo determinadas por los dos métodos.
3.20. Buscamos un I.C. para $\sigma_1^2 \,/\, \sigma_2^2$, con nivel de confianza $\gamma = 0.95$. Para ello calculamos las variancias de las dos muestras, de tamaños respectivos $n_1 = 8$ y $n_2 = 7$, que son, $s_1^2 = 0.001783928571$ y $s_2^2 = 0.0004285714298$. El cociente de variancias es $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 4.162499986$. Buscamos usando la tabla de la F los valores $F_{0.975}^{7,6} = 5.70$ y $F_{0.025}^{7,6} = 1 \,/\, F_{0.975}^{6,7} = 1 \,/\, 5.12 = 0.1953125$. Entonces, el intervalo es

$$\left(\frac{4.162499986}{5.70}, \frac{4.162499986}{0.1953125}\right) = (0.7302631555, 21.31199993).$$

Como $1 \in$ intervalo, no podemos decir que haya diferencias significativas en las precisiones (aunque “por poco”).